

Ispit iz Matematike 1, Hemija, februar, 2012. GRUPA I

- 1.(10 poena) Izračunati $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.
- 2.(10 poena) Naći kosu asimptotu funkcije $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ kada $x \rightarrow +\infty$.
- 3.(10 poena) Naći izvod funkcije $f(x) = \ln \ln(x^4 + x)$.
- 4.(10 poena) Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' = x(y'' - x \cos x)$.
- 5.(10 poena) Izračunati $\int \sin^5 x \, dx$.
- 6.(10 poena) U kutiji se nalaze tri kuglice označene brojem 1, četiri kuglice označene brojem 2, i dve kuglice označene brojem 3. Na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu iz kutije. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja izvučeni broj.
 - (a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive X .
 - (b) Naći EX i DX .

Ispit iz Matematike 1, Hemija, februar, 2012. GRUPA II

- 1.(10 poena) Izračunati $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.
- 2.(10 poena) Naći kosu asimptotu funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$ kada $x \rightarrow +\infty$.
- 3.(10 poena) Naći izvod funkcije $f(x) = 2^{\arctg \sqrt{x}}$.
- 4.(10 poena) Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' = x(y'' - x \sin x)$.
- 5.(10 poena) Izračunati $\int \cos^5 x \, dx$.
- 6.(10 poena) U kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem 1, četiri kuglice označene brojem 3, i jedna kuglica označene brojem 5. Na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu iz kutije. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja izvučeni broj.
 - (a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive X .
 - (b) Naći EX i DX .

Rešenje:

1. grupa I

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} =$$

Uvedimo smenu $x = t^{12}$. Kada $x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 1$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4-1}{t^3-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)(t^2+1)}{(t^2+t+1)} = \frac{4}{3}.$$

1. grupa II

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} =$$

Uvedimo smenu $x = t^{12}$. Kada $x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 1$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3-1}{t^4-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t^2-1)(t^2+1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t^2+t+1)}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{3}{4}.$$

2. grupa I

Kosa asimptota je oblika $y = ax + b$.

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x(x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3-4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\frac{4}{x^2}} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2-4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = 0.$$

Dobijamo da je kosa asimptota $y = x$.

2. grupa II

Kosa asimptota je oblika $y = ax + b$.

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x-4)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2-4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\frac{4}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x^2+4x}{x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x-4} = 4.$$

Dobijamo da je kosa asimptota $y = x + 4$.

3. grupa I

$$(\ln \ln(x^4 + x))' = \frac{1}{\ln(x^4 + x)} \cdot (\ln(x^4 + x))' = \frac{1}{\ln(x^4 + x)} \cdot \frac{1}{x^4 + x} \cdot (x^4 + x)' = \frac{1}{\ln(x^4 + x)} \cdot \frac{1}{x^4 + x} \cdot (4x^3 + 1).$$

3. grupa II

$$(2^{\arctg \sqrt{x}})' = 2^{\arctg \sqrt{x}} \cdot \ln 2 \cdot (\arctg \sqrt{x})' = \ln 2 \cdot 2^{\arctg \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot (\sqrt{x})' = \ln 2 \cdot 2^{\arctg \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. grupa I

$$y' = x(y'' - x \cos x)$$

Ovo je diferencijalna jednačina kojoj se red može sniziti. Izrazimo y'' .

$$y'' = \frac{1}{x}y' + x \cos x. \text{ Ovo je jednačina oblika } y'' = f(x, y'), \text{ pa se uvede smena } y' = z, y'' = z'.$$

$$z' - \frac{1}{x}z = x \cos x. \text{ Ovo je linearna jednačina.}$$

$$\int P(x) dx = \int -\frac{1}{x} dx = -\ln|x|. \text{ Za } x \geq 0 \text{ imamo da je}$$

$$z = e^{\ln x} (C + \int x \cos x \cdot e^{\ln \frac{1}{x}} dx) = x(C + \int x \cos x \frac{1}{x} dx) = x(C + \sin x).$$

4. grupa II

$$y' = x(y'' - x \sin x)$$

Ovo je diferencijalna jednačina kojoj se red može sniziti. Izrazimo y'' .

$$y'' = \frac{1}{x}y' + x \sin x. \text{ Ovo je jednačina oblika } y'' = f(x, y'), \text{ pa se uvede smena } y' = z, y'' = z'.$$

$$z' - \frac{1}{x}z = x \sin x. \text{ Ovo je linearna jednačina.}$$

$$\int P(x) dx = \int -\frac{1}{x} dx = -\ln|x|. \text{ Za } x \geq 0 \text{ imamo da je}$$

$$z = e^{\ln x} (C + \int x \sin x \cdot e^{\ln \frac{1}{x}} dx) = x(C + \int x \sin x \frac{1}{x} dx) = x(C - \cos x).$$

5. grupa I

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x dx &= \int \sin^4 x \sin x dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx = \\ \text{Uvedimo smenu } t &= \cos x, dt = -\sin x dx \\ &= -\int (1 - t^2)^2 dt = -\int (1 - 2t^2 + t^4) dt = -(t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}) + C = \\ &= -(\cos x - 2\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5}) + C. \end{aligned}$$

5. grupa II

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x dx &= \int \cos^4 x \cos x dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \\ \text{Uvedimo smenu } t &= \sin x, dt = \cos x dx \\ &= \int (1 - t^2)^2 dt = \int (1 - 2t^2 + t^4) dt = t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \\ &= \sin x - 2\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

6. grupa I

(a) Skup vrednosti koje može da uzima slučajna promenljiva X je $\{1, 2, 3\}$, pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $P\{X = 1\} = \frac{3}{9}, P\{X = 2\} = \frac{4}{9}, P\{X = 3\} = \frac{2}{9}$.

Slučajna promenljiva X ima zakon raspodele

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

(b) $EX = 1 \cdot \frac{3}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{17}{9}$.

Slučajna promenljiva X^2 ima zakon raspodele

$$X^2 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{3}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$DX = E(X)^2 - (EX)^2 = 1 \cdot \frac{3}{9} + 4 \cdot \frac{4}{9} + 9 \cdot \frac{2}{9} - (\frac{17}{9})^2 = \frac{44}{81}$$

6. grupa II

(a) Skup vrednosti koje može da uzima slučajna promenljiva X je $\{1, 3, 5\}$, pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $P\{X = 1\} = \frac{2}{7}, P\{X = 3\} = \frac{4}{7}, P\{X = 5\} = \frac{1}{7}$.

Slučajna promenljiva X ima zakon raspodele

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

(b) $EX = 1 \cdot \frac{2}{7} + 3 \cdot \frac{4}{7} + 5 \cdot \frac{1}{7} = \frac{19}{7}$.

Slučajna promenljiva X^2 ima zakon raspodele

$$X^2 : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 25 \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$DX = E(X)^2 - (EX)^2 = 1 \cdot \frac{2}{7} + 9 \cdot \frac{4}{7} + 25 \cdot \frac{1}{7} - (\frac{19}{7})^2 = \frac{80}{49}$$